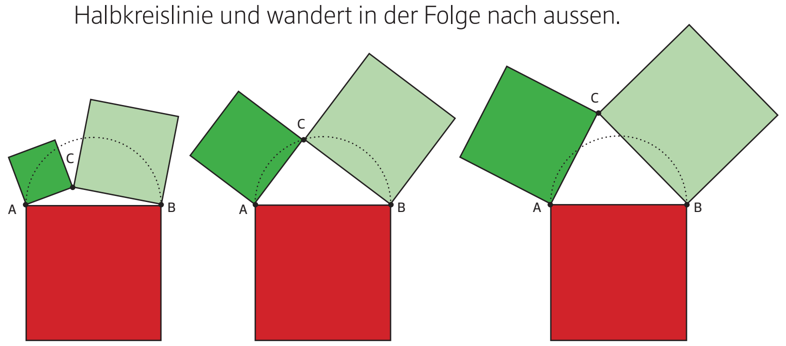
Goldgrube

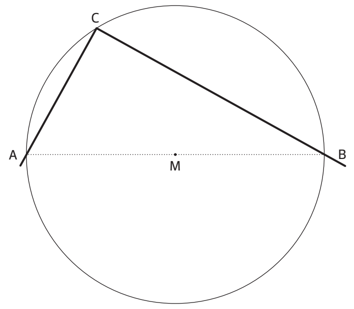
Selbsttätigkeit

Thales – Wegbereiter für Pythagoras:

Punkt C wandert vom Innern des Halbkreises über der Strecke AB nach oben – aus dem Halbkreis heraus. Das rote Quadrat bleibt dabei immer stabil – beobachte die grünen Quadrate. Der Punkt C liegt im Innern des Halbkreises, liegt dann auf der Halbkreislinie und wandert in der Folge nach aussen.



1. Du hast freie Hand, die Figuren auszumessen. Was bleibt beim Übergang von einem Fall zum andern fest, was ändert sich? Welche Besonderheit lässt sich im mittleren Bild entdecken?



2. Wähle auf dem Halbkreisbogen ein paar verstreut liegende Positionen für C. Verbinde jedes Mal C mit A und B. Miss den Winkel zwischen den von C nach A und B verlaufenden Schenkeln. Was stellst Du fest?

3. Mit Deinen Messungen hast Du die Richtigkeit des Satzes von Thales erhärtet, aber noch nicht bewiesen. Wieso?

4. Die Seiten, die dem rechten Winkel anliegen (CA und CB), heissen Katheten. Die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite (AB) heisst Hypotenuse. Erkundige Dich im Internet über diese aus dem Griechischen stammenden Begriffe.

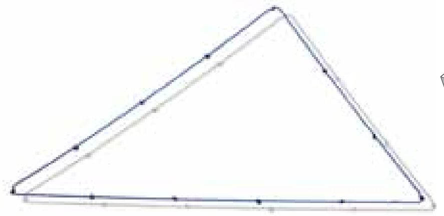
Der Satz des Pythagoras.

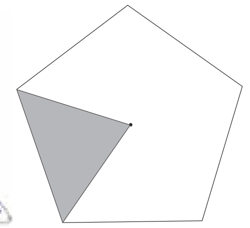
5. Häufig kommt der Kehrsatz des Pythagoras zur Anwendung. Wie kann dieser formuliert werden?

Rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen heissen **pythagoreische** oder **ägyptische** Dreiecke.

6. Suche weitere pythagoreische Dreiecke! Es gibt mit Sicherheit unendlich viele – warum?

Mit einem zwölfknotigen Seil – wie diesem – wurden in der Antike im Bauwesen und bei Feldvermessungen rechte Winkel abgesteckt.





7. Forme mit dem bereitliegenden Seil und Schreibzeug ein rechtwinkliges Dreieck („Zimmermanns-Dreieck"), ein gleichschenkliges Dreieck, ein Quadrat, eine Raute sowie näherungsweise das Bestimmungsdreieck eines regelmässigen Fünfecks (gemäss Abbildung).

Das gefaltete Taschentuch:

8. Falte ein quadratisches Taschentuch so, dass wieder ein Quadrat entsteht. Gibt es mehrere Möglichkeiten?

9. Gibt es ein kleinstes und ein grösstes Quadrat?

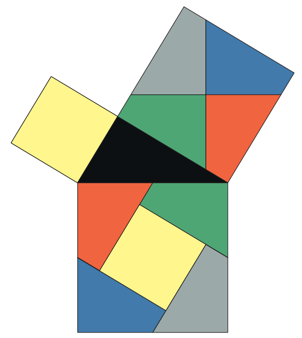
10. Mathematisch spannend ist die Frage nach der Grösse der Quadrate und ihren gegenseitigen Beziehungen. Was stellst Du fest?

Übrigens: Wenn Du an Stelle des Taschentuchs zu Papier greifst, ergibt sich ein noch besserer Eindruck.

Vielfach bewiesen: Der Satz des Pythagoras.

Es gibt weit über 100 geometrische und algebraische Beweise zum Satz des Pythagoras – ein Indiz für seine überragende Bedeutung.
Zwei Beweise durch Zerlegen und Umordnen:

➲ Schaufelrad-Beweis nach Henry Perigal (1801–1898):
Die Zerlegung besteht aus der kleinstmöglichen Anzahl von fünf Teilen und ist symmetrisch.



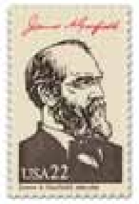
11. Wickle das vorliegende ALU-Modell ab beziehungsweise auf. Was beobachtest Du?

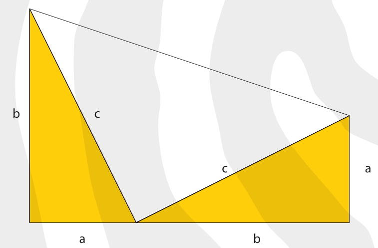
12. Worin besteht die Kernidee des Beweises?

13. Wie sieht die Perigal-Konfiguration bei einem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck aus?

➲ Garfield stellt sich hinter Pythagoras:

14. Durch geeignetes Ablegen der vier (gelben) rechtwinkligen Dreiecke im leeren rechten Feld entsteht ein interessantes Quadrat. Warum? Was erkennst Du in dieser Anordnung? Entdeckst Du Bekanntes aus der Taschentuch-Faltübung?





15. Berechne die Summe der Flächeninhalte der drei Dreiecke aus dem Garfield-Beweis sowie den Flächeninhalt des Trapezes. Zeige: Aus der Gleichwertigkeit der Ansätze folgt: $a^2 + b^2 = c^2$

Im Wald des Pythagoras:

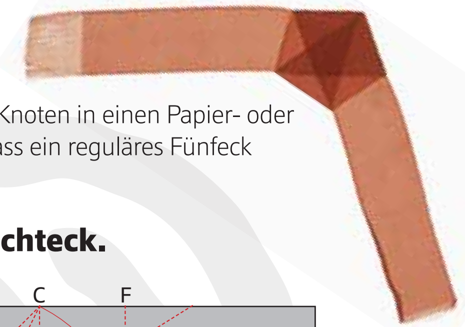
16. Wieso stehen gleich hohe „Tannen" auf einem (Viertel-)Kreis?

17. Welche Besonderheit weisen die Koordinaten der Punkte auf dem 30°-, 45°- und 60°-Polstrahl auf?

Die „Tannen" auf der *x*- beziehungsweise auf der *y*-Achse nehmen eine rechnerisch angenehme Sonderstellung ein. Inwiefern lässt dieser Umstand die nächste Frage erahnen?

18. Wieso nehmen die „Tannenhöhen" längs eines Polstrahls *linear* zu?

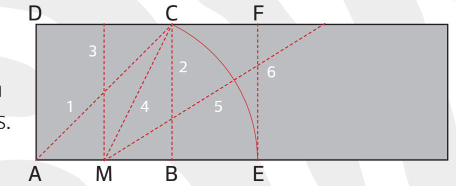
Der Goldene Schnitt.



19. Binde einen einfachen platten Knoten in einen Papier- oder Stoffstreifen. Überzeuge Dich, dass ein reguläres Fünfeck entsteht.

Papierfalten: Goldenes Rechteck.

Ein Goldenes Rechteck entsteht durch blosses Falten eines Papierstreifens. Aus dem zu „erfaltenden"



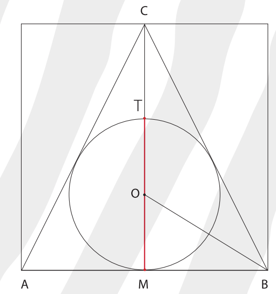
Quadrat ABCD lässt sich die Strecke MC gewinnen, deren Länge die Schlüsselzahl $\sqrt{5}$ enthält.

20. Falte der Reihe nach entsprechend der Linien 1 bis 6. Bei der Herstellung von Falz 5 (als Halbierende des Winkels CMB) kommt C auf den gegenüberliegenden Papierstreifenrand in E zu liegen. Gestalte mit dem Puzzle aus Goldenen Rechtecken weitere Muster.

Das Dreieck ABC ist ins Quadrat mit der Seite AB eingebettet. Es zeigt sich, dass T die Strecke MC im Goldenen Schnitt teilt.

21. Konstruiere den Punkt T durch „blosses" Falten eines Blatts Papier.

Zwei Tipps:
Vom Kreis wird nur der Durchmesser gebraucht. BO ist Winkelhalbierende im Dreieck ABC.



Nach Le Corbusier hat ein Mann mit erhobenem Arm die idealen Masse:
Nabelhöhe: 113 cm
Scheitelhöhe: 183 cm
Fingerspitzen bei erhobenem Arm: 226 cm

22. Wie steht es mit Deinen Körpermassen?

Studiere die Vor- und Rückseite einer 10-Franken-Note und informiere Dich dazu im Internet. Bei gewissen Blattanordnungen von Pflanzen dienen Zahlen aus der der Fibonacci-Folge nachgebildeten Lucas-Folge 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, … zur Beschreibung.

23. Wie lautet das Bildungsgesetz dieser Folge?

24. Jede Lucas-Zahl ab 3 ist die Summe zweier Fibonacci-Zahlen. Prüfe diese Aussage an ein paar Beispielen.

25. Zeigt sich bei den Quotienten benachbarter Lucas-Zahlen eine Tendenz? Was vermutest Du?

Herausgeber: Liechtensteinisches Landesmuseum, Vaduz
Gestaltung: Rainer Mietsch cuadrilla, Leipzig